

# Važnost matematike u morskim ekosustavima

---

Jovanović Tarašić, Lorena

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split / Sveučilište u Splitu**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:226:010042>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-25**



Repository / Repozitorij:

[Repository of University Department of Marine Studies](#)



**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STUDIJE MORA**  
**SVEUČILIŠNI PRIJEDIPLOMSKI STUDIJ BIOLOGIJA I TEHNOLOGIJA MORA**

**Lorena Jovanović Tarašić**

**VAŽNOST MATEMATIKE U MORSKIM**  
**EKOSUSTAVIMA**

**Završni rad**

**Split, listopad 2024.**

**SVEUČILIŠTE U SPLITU**  
**SVEUČILIŠNI ODJEL ZA STUDIJE MORA**  
**SVEUČILIŠNI PRIJEDIPLOMSKI STUDIJ BIOLOGIJA I TEHNOLOGIJA MORA**

**VAŽNOST MATEMATIKE U MORSKIM  
EKOSUSTAVIMA**

**Završni rad**

**Predmet: Matematika**

**Mentor:**

Prof. dr. sc. Tatjana Stanivuk

**Student:**

Lorena Jovanović Tarašić

**Split, listopad 2024.**

## Zahvala

Najveća zahvala mojoj mentorici prof. dr. sc. Tatjani Stanivuk na svim savjetima i stručnoj pomoći prilikom izrade završnog rada. Hvala na uvijek pozitivnom stavu i ukazanom povjerenju.

Hvala svim profesorima sveučilišnog odjela za studije mora na pruženom znanju, podršci i razumijevanju tijekom mog studiranja.

Hvala mojim predivnim prijateljima i kolegama koji su mi nesebično pomagali, uljepšali su mi ove tri godine studiranja i bez njih bi sigurno bilo teže.

Hvala svim članovima moje obitelji jer su nesebično vjerovali u mene, a posebno mojim roditeljima koji su mi omogućili bezbrižno studiranje i pružili mi ono što želim.

Sveučilište u Splitu

Završni rad

Sveučilišni odjel za studije mora

Sveučilišni prijediplomski studij Biologija i ekologija mora

## VAŽNOST MATEMATIKE U MORSKIM EKOSUSTAVIMA

**Lorena Jovanović Tarašić**

### Sažetak

Matematika je neizostavan dio naših života, a matematičko je znanje nužno za sva područja znanosti. Kroz ovaj rad prikazat će se način na koji matematika i biologija funkcioniraju zajedno. Matematička biologija ima za cilj matematičke prezentacije i modeliranje bioloških procesa, koristeći tehnike i alate primijenjene matematike.

Proučavanje morskih ekosustava postaje sve važnije. Međutim, često se čini da su terenski pokusi vrlo skupi ili čak nemogući. To je jedan od razloga zašto matematičko modeliranje i računalne simulacije imaju vrlo važnu ulogu u ekologiji mora. U ovom radu razmatraju se različiti suvremeni pristupi modeliranju morskih ekosustava. Objašnjene su temeljne ideje i dano je nekoliko važnih primjera koji su korišteni u novim studijama.

(15 stranica, 2 slike, 30 literaturnih navoda, jezik izvornika: hrvatski)

**Ključne riječi:** matematika, matematički modeli, ekologija mora, morski ekosustavi

**Mentor:** prof. dr. sc. Tatjana Stanivuk

**Ocjenjivači:** 1. izv. prof. dr. sc. Vedran Poljak

2. prof. dr. sc. Tatjana Stanivuk

3. doc. dr. sc. Frano Matić

## BASIC DOCUMENTATION CARD

---

University of Split  
BSc Thesis  
Department of Marine Studies  
Undergraduate study Marine Biology and Ecology

### **THE IMPORTANCE OF MATHEMATICS IN MARINE ECOSYSTEMS**

**Lorena Jovanović Tarašić**

#### **Abstract**

Mathematics is an indispensable part of our lives, and mathematical knowledge is necessary for all areas of science. Through this work, the way in which mathematics and biology work together will be shown. Mathematical biology aims at mathematical presentations and modeling of biological processes, using the techniques and tools of applied mathematics. The study of marine ecosystems is becoming increasingly important. However, it often seems that field trials are very expensive or even impossible. This is one of the reasons why mathematical modeling and computer simulations play very important role in marine ecology. This work discusses various modern approaches to modeling marine ecosystems. The basic ideas are explained and several important examples are given that have been used in new studies.

(15 pages, 2 figures, 30 references, original in: Croatian)

**Keywords:** mathematics, mathematical models, marine ecology, marine ecosystems

**Supervisor:** prof. dr. sc. Tatjana Stanivuk

**Reviewers:**

1. izv. prof. dr. sc. Vedran Poljak
2. prof. dr. sc. Tatjana Stanivuk
3. doc. dr. sc. Frano Matic

# SADRŽAJ

<b>1. UVOD</b> .....	<b>1</b>
<b>2. RAZRADA TEME</b> .....	<b>2</b>
2.1 Matematika .....	2
2.1.1 Geometrija.....	2
2.1.2 Trigonometrija.....	4
2.1.3 Eksponencijalna funkcija .....	6
2.2 Morski ekosustavi .....	8
2.2.1 Tipovi matematičkog modeliranja u morskim ekosustavima .....	11
2.2.2 Ciljevi matematičkog modeliranja u morskim ekosustavima .....	13
<b>3. ZAKLJUČAK</b> .....	<b>15</b>
<b>4. LITERATURA</b> .....	<b>16</b>

## 1. UVOD

Matematika je vrlo kompleksno područje zbog brojnih zakonitosti koje vladaju unutar njezinih grana i koje se prilikom izračuna moraju poštivati. Primjena matematike u morskim ekosustavima ima značajnu ulogu. Ključna je u proučavanju morskih ekosustava zato što se pomoću nje mogu razumjeti kompleksni odnosi između različitih organizama i njihovog okoliša.

Kroz matematičke modele znanstvenici mogu simulirati različite situacije i predvidjeti kako će se populacije organizama razvijati u određenim uvjetima. Matematičko modeliranje u morskim ekosustavima koristi se za stvaranje pojednostavljenih verzija stvarnog svijeta kako bi se bolje objasnile kompleksne interakcije unutar ekosustava. Ti modeli uključuju matematičke jednadžbe koje opisuju rast populacija, hranidbene mreže, migracije organizama i utjecaje okolišnih čimbenika na morske organizme. Znanstvenici prikupljaju podatke o biologiji organizama i okolišu te ih koriste kao ulazne parametre u matematičke jednadžbe. Nakon što se model izradi, može se simulirati kako će se populacije organizama razvijati pod određenim uvjetima. Kroz te simulacije, znanstvenici mogu predvidjeti kako će ekosustav reagirati na promjene, poput povećanja temperature ili smanjenja dostupnosti hrane. Ovi modeli omogućuju predviđanje budućih situacija te pružaju temelj za razvoj održivih strategija upravljanja morskim ekosustavima. Matematičko modeliranje postaje nezamjenjiv alat u očuvanju morskih ekosustava i donošenju informiranih odluka za održivi razvoj.



## **2. RAZRADA TEME**

### **2.1 Matematika**

Povijest matematike počinje 532. godine prije Krista koja označava rođenje grčkog matematičara Pitagore. Danas u sadašnjosti povijest matematike kao i brojevi ima svoj početak, ali ne i kraj. Ta veličanstvena znanost, može se čak reći i umjetnost, dokazala je da je sve staro nekada bilo novo, a sve što je novo, jednoga će dana biti staro. Matematika je znanost koja proučava količinu (brojeve), strukturu, prostor i promjenu. Među matematičarima i filozofima postoje različita stajališta o definiciji matematike (Steen, 1988.).

Nastala je iz brojanja, računanja i mjerenja, te iz sustavnog proučavanja oblika i kretanja fizičkih objekata. Matematika pomaže u rješavanju problema, donošenju logičkih zaključaka i pronalaženju uzoraka u svijetu koji nas okružuje. Razvoj matematike bio je spor sve do renesanse, kada su inovacije u matematici, zajedno s novim znanstvenim saznanjima, dovele do naglog porasta broja matematičkih otkrića čiji se trend nastavlja sve do danas (Schleicher i Lackmann, 2011).

Matematika je neizostavan alat u znanstvenim istraživanjima, tehnologiji, ekonomiji i mnogim drugim područjima. Zbog svog značaja, često je nazvana „kraljicom znanosti“ i „jezikom koje govore sve znanosti“. Objašnjava eksperimentalne rezultate koje dobivaju znanstvenici, predviđa nove fenomene i predstavlja temelj za mnoge aspekte svakodnevnog života. Uz pomoć matematike moguće je modelirati stvarnost, predviđati događaje i razvijati inovativna rješenja za brojne izazove s kojima se, tijekom života, valja suočiti. Ne smije se zaboraviti da rješavanje matematičkih problema može zahtijevati godine ili čak stoljeća neprekinutog testiranja i istraživanja.

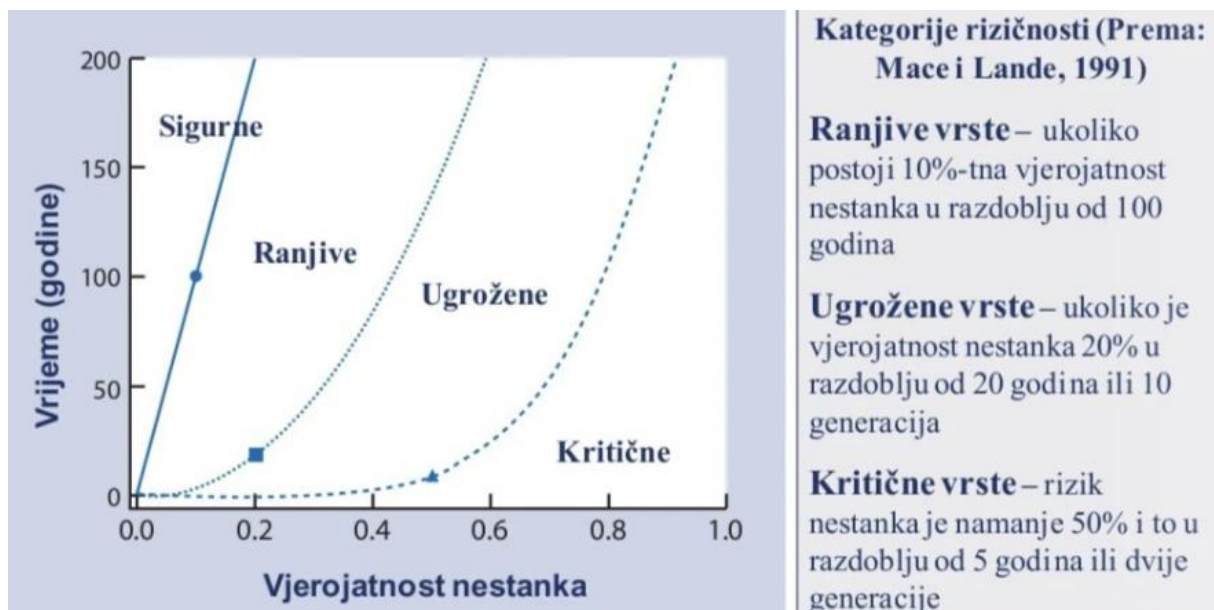
#### **2.1.1 Geometrija**

Geometrija je grana matematike koja se bavi problemima oblika, veličina, odnosa među likovima i svojstvima prostora. U mnogim ranim kulturama geometrija se razvijala kao samostalna znanstvena disciplina koja proučava duljinu, površinu i volumen. Njena bogata povijest seže tisućama godina unatrag, počevši od egipatskih graditelja piramida pa sve do antičkih grčkih matematičara poput Euklida, čije je djelo „Euklidova geometrija“ postavilo

temelje za mnoge buduće generacije. Arhimed je uveo genijalne tehnike za izračunavanje površine i volumena koje su prethodile današnjem integralnom računu.

Kroz povijest, geometrija je evoluirala i dijeli se na planimetriju, stereometriju, trigonometriju, analitičku geometriju i diferencijalnu geometriju, pri čemu svaka od navedenih grana ima svoj specifičan pristup i primjene. Suvremena geometrija razmatra nove tipove prostora i koristi se u različitim područjima poput računalnih znanosti, dizajna, geografije i fizike, omogućujući modeliranje prostora na matematički precizan način.

Primjer primjene grafičkog prikaza:



**Slika 1.** Razine ugroženost vrsta kao funkcija vremena i vjerojatnosti nestanka (izvor: Akcakaya, 1992.)

Utjecaji koje čovjek vrši na prirodne ekosustave kroz prekomjeren izlov, uništavanje i fragmentaciju staništa, smanjenje kvalitete prirodnih staništa, unošenje alohtonih vrsta, te različite vidove zagađenja, predstavljaju sve veći pritisak na prirodne populacije povećavajući izgleda za njihov nestanak.

### 2.1.2 Trigonometrija

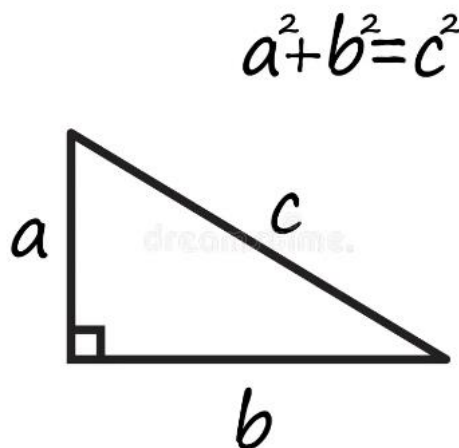
Trigonometrija je grana matematike koja se bavi specifičnim funkcijama kutova i njihovom primjenom te proučava odnose između duljina i kutova u trokutu. Može se podijeliti na ravninsku (kutovi i udaljenost u ravnini) i sfernu trigonometriju (kutovi i udaljenosti u prostoru).

Nastala je u 3. stoljeću prije Krista iz geometrijskog proučavanja astronomskih objekata i mjerenja zbog navigacije. Astronomi su tada prvi primjetili da duljine stranica pravokutnog trokuta i iznosi kutova između pripadajućih stranica imaju fiksne odnose. U astronomiji se koristila sferna trigonometrija koja je danas zamijenjena linearnom algebram.

Babilonci i Egipćani su znali za Pitagorin teorem i to znanje su koristili za gradnju piramida i mjerenje polja i tako je nastajala trigonometrija. Babilonci su koristili seksagezimalni brojevni sustav, tj. sustav s bazom 60 koji se danas koristi za računanje kutova.

Ravninska trigonometrija ima široku primjenu u građevini i inženjerstvu za razne projekte i nacрте. Trigonometrija se koristi u cijeloj matematici i kroz nju se primjenjuje na sve ostale znanosti, npr. u fizici u područjima optike i statistike i u fizikalnoj kemiji i biologiji.

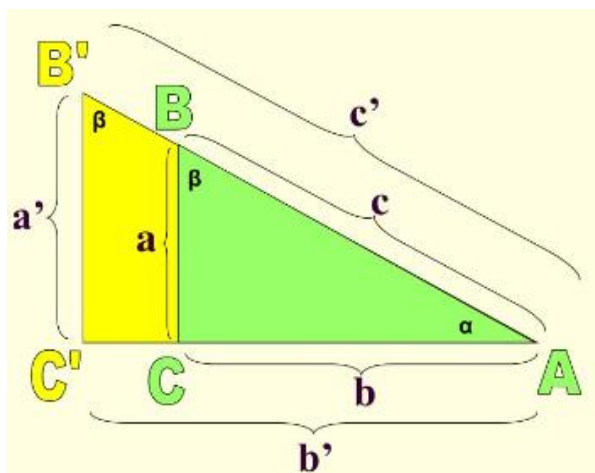
Pravokutni trokut posebna je vrsta trokuta koja se često pojavljuje pri rješavanju raznovrsnih geometrijskih zadataka. Zbog toga i nije neobično što se uz njega veže više istaknutih poučaka. Osobito je naširoko poznat Pitagorin poučak koji povezuje duljine stranica svakog pravokutnog trokuta: zbroj kvadrata duljina kateta bilo kojeg pravokutnog trokuta jednak je kvadratu duljine hipotenuze. Ako su zadane duljine bilo kojih dviju stranica pravokutnog trokuta, duljina treće može se izračunati primjenom Pitagorina poučka (slika 2).



Slika 2. Pitagorin poučak (izvor: Dakić i Elezović, 2020.)

No nerijetko se u raznim praktičnim i realnim problemima javljaju i oni vezani uz kutove pravokutnog trokuta.

Prikazan je pravokutni trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C i kutom  $\alpha$  uz vrh A (slika 3). Duljine stranica trokuta  $a$ ,  $b$  i  $c$  nalaze se nasuprot vrhova A, B i C. Pravac B'C' paralelan je pravcu BC. Trokut AB'C' sličan je trokutu ABC – sva tri kuta su im jednaka. Duljine stranica  $a'$ ,  $b'$  i  $c'$  pripadaju trokutu AB'C'.



**Slika 3.** sličnost trokuta i definicije trigonometrijskih funkcija (izvor: Dakić i Elezović, 2020.)  
U sličnim su trokutima omjeri duljina odgovarajućih stranica jednaki. Zato za sve pravokutne trokute čiji je jedan kut  $\alpha$  vrijedi:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

Ovi omjeri stranica ne ovise o veličini pravokutnog trokuta, već samo o veličini njegovog kuta  $\alpha$ . Zato kažemo da su *funkcije kuta  $\alpha$* .

Prema njihovom položaju prema kutu  $\alpha$  kateta  $a$  zove se nasuprotna kateta, a kateta  $b$  priležeća kateta ili kateta uz kut  $\alpha$ . I tako vrijede sljedeće definicije:

omjer  $\frac{a}{c}$  nasuprotne katete kutu  $\alpha$  i hipotenuze je sinus kuta  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

omjer  $\frac{b}{c}$  priležeće katete kutu  $\alpha$  i hipotenuze je kosinus kuta  $\alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

omjer  $\frac{a}{b}$  nasuprotne i priležeće katete kutu  $\alpha$  je tangens kuta  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

omjer  $\frac{b}{a}$  priležeće i nasuprotne katete kutu  $\alpha$  je kotangens kuta  $\alpha$ :

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

Sinus, kosinus, tangens i kotangens nazivamo trigonometrijskim funkcijama.

### 2.1.3 Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija definira se kao:  $f(x) = a^x$ , pri čemu je baza  $a > 0$  i  $a \neq 1$ . Kada je baza  $a > 1$ , eksponencijalna funkcija je rastuća, a kada je baza  $0 < a < 1$  funkcija je padajuća. Baza potencije mora biti pozitivan broj, ako bi baza bila negativan broj, tada potencije kao što su  $(-2)^{-\frac{1}{4}}$ ,  $(-3)^{\frac{3}{8}}$  i slične ne bi bile realni brojevi. Ako bi pak baza bila jednaka nuli, tada bi vrijedilo  $0^x = 0$  za svaki realni broj  $x$  osim za  $x = 0$ , kada ta potencija nije definirana. Jednako tako je  $1^x = 1$  za svaki realni broj  $x$ . Dakle funkcija  $f(x) = 1^x = 1$  je konstanta pa je zbog toga uvedeno i ograničenje  $a \neq 1$ . Koristi se za izračunavanje eksponencijalnog rasta ili opadanja zadanog skupa podataka. Ista je bitna zato što se pomoću nje mogu rješavati razni problemi kako u raznim znanostima tako i u biologiji.

U biologiji je dobro poznato da mnoge populacije u početku svog razvoja pokazuju svojstva eksponencijalnog rasta. Eksponencijalni rast svoju primjenu nalazi u mikrobiologiji kod rasta bakterija, konzervacijskoj biologiji za upravljanje ugroženim populacijama, kod uzgoja organizama i u ribarstvu za prognozu dinamike ribljih populacija i sl.

Primjer primjene eksponencijalne funkcije u ribarstvu:

#### Zadatak 1.

Broj riba u uzgajalištu raste u skladu s eksponencijalnim zakonom  $N = N_0 * 10^{0.02m}$  gdje je  $m$  broj mjeseci proteklih od početka promatranja, a  $N_0$  broj riba na početku promatranja.

- Koliki je broj riba u uzgajalištu nakon godinu dana, ako je na početku bilo 400 riba?
- Za koliko vremena će se broj riba udvostručiti?

Rješenje:

a.  $N = 400 * 10^{0.02*12}$

$$N = 695 \text{ riba}$$

b.  $800 = 400 * 10^{0.02m}$

$$2 = 10^{0.02m}$$

$$0.02m = \log 2$$

$$m = 15 \text{ mjeseci}$$

Iz ove jednađbe dobije se da je broj riba nakon godinu dana 695 i da se broj riba udvostruči nakon 15 mjeseci.

## 2.2 Morski ekosustavi

Morski ekosustavi su vodena okruženja s visokom koncentracijom otopljene soli, poput onih koje se nalaze u oceanima ili u njihovoj blizini. Ovi ekosustavi definirani su različitim biotičkim (živim) i abiotičkim (neživim) čimbenicima. Biotički čimbenici uključuju prisutne biljke, gljive, životinje i mikroorganizme, kao i njihove međusobne odnose. S druge strane, neki od najvažnijih abiotičkih čimbenika uključuju količinu sunčeve svjetlosti u okolišu, koncentraciju kisika i hranjivih tvari otopljenih u vodi, blizinu kopna, dubinu i temperaturu (Zhao i Costello, 2019).

Sunčeva svjetlost ključan je abiotički čimbenik za morske ekosustave. Toliko je važna da znanstvenici dijele morska staništa u kategorije temeljene na količini svjetlosti koju primaju. Eufotička zona obuhvaća gornji dio morskog ekosustava, protežući se do 200 metara ispod površine. Na toj dubini ima dovoljno svjetlosti za redovitu fotosintetsku aktivnost. Ova zona je dom većine morskog života. Disfotička zona nalazi se ispod eufotičke zone i prostire se od 200 do 1000 metara ispod površine. Sunčeva svjetlost i dalje je dostupna na tim dubinama, ali nedovoljno da bi se vršila fotosinteza. Afotička zona nalazi se ispod disfotičke zone i ne prima nikakvu sunčevu svjetlost.

Znanstvenici klasificiraju morske ekosustave u nekoliko glavnih grupa, iako postoje razlike ovisno o izvoru onoga što čini morski ekosustav. Točan broj morskih ekosustava još je oduvijek sporna točka. Mogu se podijeliti na estuarije, slane močvare, šume mangrova, šume kelpa, koraljne grebene, livade morskih cvjetnica, otvoreni ocean i duboko more.

Estuarij je obalno područje gdje se rijeka susreće s oceanom. U tim područjima zaštićenim od ekstremnih vremenskih uvjeta, hranjive tvari i soli iz oceana miješaju se s onima iz rijeke. Kao rezultat toga, estuariji su među najproduktivnijim ekosustavima na planetu, s bogatom raznolikošću života. Zbog svog povoljnog položaja, estuariji pružaju ljudskim populacijama mogućnosti za obavljanje aktivnosti poput ribolova, plovidbe i prijevoza.

Za razliku od estuarija, slane močvare nastaju na mjestima gdje se ocean susreće s kopnom. To su niska, vlažna, muljevita područja koja se povremeno ili kontinuirano zasićuju slanom vodom i upravo zbog toga bogata su hranjivim tvarima. Halofilne trave imaju veću ulogu od algi i formiraju površinski pokrov ispresjecan kanalima i bazenima u kojima se događaju velike i brze promjene ekoloških faktora (osobito temperature i saliniteta). Također pružaju

kontinuiranu opskrbu uginulom organskom tvari, dok je uloga bakterija da ju razgrađuju i pomažu reciklirati natrag u ekosustav kao hranjivu tvar.

Šume mangrova nalaze se na spoju kopna i mora u tropskim i subtropskim geografskim širinama gdje preživljavaju u uvjetima velike slanosti, ekstremnih plima, jakih vjetrova, visokih temperatura i muljevitog, anaerobnog tla. Stabla imaju zračno korijenje koje ima ulogu prozračivanja korijenovog sustava i obično korijenje koje ima ulogu razbijanja valova. Zbog čestih poplava, mangrove imaju posebnu prilagodbu koja njihovom korijenju omogućuje da filtrira sol i apsorbira kisik. Šume mangrova stvaraju jedinstveno ekološko okruženje koje se sastoji od malog broja biljnih vrsta, a jedna od karakteristika je osobito obilje rakova. Imaju i značajnu ekološku vrijednost zato što štite i stabiliziraju obale te spadaju među najproduktivnije ekosustave zbog proizvodnje velike količine organskog ugljika. Njihove jedinstvene značajke također ih čine pogodnim mjestima za eksperimentalna istraživanja biološke raznolikosti i funkcije ekosustava.

Šume kelpa rasprostranjene su širom svijeta u plitkim otvorenim obalnim vodama i uglavnom su ograničene na područja gdje je temperatura niža od 20°C, a prostiru se sve do polarnih krugova. Smeđe alge koje izgrađuju šume kelpa imaju jedan od najvećih kapaciteta rasta u čitavom biljnom carstvu. Zajednice kelpa su pod snažnim utjecajem oluja koje otkidaju odrasle biljke i otvaraju prostor za nove izdanke. Spadaju među najproduktivnija morska staništa, koja se pored toga odlikuju i velikom bioraznolikošću (M. Šolić, 2012).

Koraljni grebeni su velike strukture otporne na valove koje su izgrađene od mnogobrojnih jedinki različitih sporo rastućih vrsta čiji su vapnenasti skeleti međusobno stopljeni u velike oblike (M. Šolić, 2012). Prvenstveno se pojavljuju u toplim tropskim dijelovima oceana, ali neki koralji mogu živjeti i u hladnijim, dubljim vodama. U vapnenačkom okviru koraljnih grebena i oko njega živi složen niz biljaka i životinja. Organizmi koraljnih grebena koegzistiraju u složenim odnosima, ali ako se jedna vrsta ukloni ili izumre, njezin nestanak može imati posljedice za cijeli koraljni greben, a ravnoteža ekosustava može se znatno promijeniti.

Livade morskih cvjetnica su morski ekosustavi koje tvore predstavnici porodice *Zosteraceae*, jedine sjemenjače koje su se prilagodile životu ispod morske razine. Poznato je oko 30 vrsta od kojih su većina tropske. Vrlo su značajne za morske ekosustave zato što upravo one čine najveći dio godišnje proizvodnje svježih tvari. Livade morskih cvjetnica su vrlo poželjna staništa za brojne vrste upravo zbog toga što pružaju sklonište, hranjive tvari i reprodukciju.



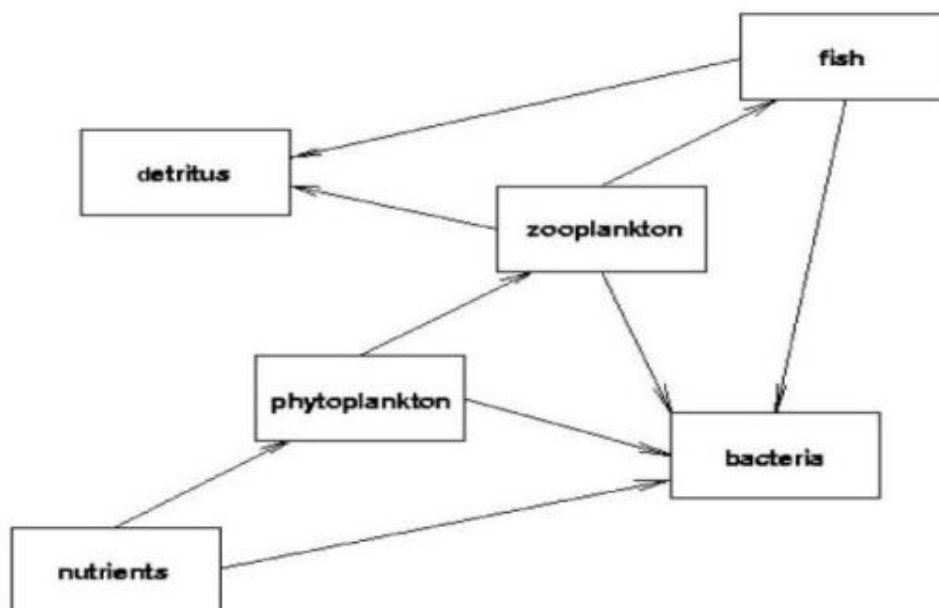
Otvoreni ocean najveći je morski ekosustav. Mnogi organizmi otvorenog mora čitav život se ne približe obali, morskom dnu ili površini vode već sve vrijeme provode u vodenom stupcu. U ovom području odvijaju se velike promjene ekosustava s promjenom dubine vode. Dio na površini oceana, poznat kao eufotična zona, prima puno svjetla i kisika, prilično je topao i dom je mnogim fotosintetskim vrstama. Tu se nalaze alge, uključujući fitoplankton koje su odgovorne za velik dio izvorne proizvodnje hrane za cijeli ocean i stvaraju otprilike pola ukupnog kisika na Zemlji. Dublji dio otvorenog oceana dom je brojnim beskralježnjacima i kralježnjacima.

Duboko more je područje gdje je voda tamnija, hladnija i ima manje dostupnog kisika. Organizmi koji obitavaju u disfotičnim i afotičnim zonama razvili su posebne prilagodbe (npr. velika usta kojima hvataju hranjive tvari koje padnu iz plićih dijelova oceana) koje im omogućuju preživljavanje u ekstremnim uvjetima.

Hranidbene mreže opisuju funkcionalne odnose između vrsta u morskim ekosustavima. Sastoje se od hranidbenih lanaca koji predstavljaju puteve protoka energije od primarnih producenata, preko serije konzumenata, pa sve do vršnog predatora. Temeljni procesi u ekosustavu su asimilacija, fotosinteza, konzumacija, razgradnja, transformacija (preoblikovanje). Trofičke razine mogu se podijeliti na proizvođače (producente), konzumente (potrošače), destruentne (razgrađivače) i transformatore (preoblikovatelje).

Od velike raznolikosti bioloških procesa u morskom ekosustavu, posebnu važnost imaju prijenos biomase kroz trofičku mrežu putem smrtnosti, grabežljivosti i probave te rast i razmnožavanje.

Prvi korak u izradi modela morskog ekosustava je identificiranje vrsta i tokova mase i energije. Prvi problem može predstavljati velik broj vrsta u ekosustavu koje je nemoguće sve eksplicitno uključiti u model. Prema tome, treba ograničiti proučavanje na nekoliko određenih vrsta (smatrajući sve ostale kao određeni „medij“) ili kombinirati različite vrste u „skupinu“, npr. podijeliti cijelu planktonsku zajednicu na fitoplankton i zooplankton bez uzimanja u obzir da postoji više vrsta unutar svake od ovih dviju skupina. Druga poteškoća dolazi od nedostatka informacija o prijenosu biomase između različitih vrsta. Obično je ishod istraživanja u toj fazi dijagram toka. Jednostavan primjer takvog dijagrama prikazan je na slici 2 gdje odjeljci odgovaraju grupama ekosustava koje su odabrane da budu uključene u model, a strelice prikazuju prijenos mase kroz trofičku mrežu.



Slika 4. Primjer hranidbene mreže morskog ekosustava (izvor: Jørgensen S.E., 1999.)

### 2.2.1 Tipovi matematičkog modeliranja u morskim ekosustavima

Do druge polovice dvadesetog stoljeća morska ekologija napredovala je kao znanost toliko da je matematičko modeliranje stanja morskih ekosustava postalo neovisni znanstveni smjer u prirodnim znanostima. Ocean se smatra složenim dinamičkim sustavom fizičkih, kemijskih, bioloških, geoloških i drugih procesa. Razvoj računalnih pomagala i aparata primijenjene matematike rezultirao je intenzivnom izgradnjom matematičkih modela morskih ekosustava. Oni su omogućili sistematizaciju stečenih znanja iz različitih područja znanosti o moru u svrhu predviđanja i upravljanja stanjem morskog bazena.

Postoji nekoliko vrsta matematičkih modela morskih ekosustava. Ovisno o svrhama modeliranja, mogu se podijeliti na simulacijske modele ograničene na određene regije i razvijene za specifične svrhe, te kvalitativne, teorijske modele koji se koriste za razjašnjavanje općih zakonitosti razvoja procesa i njihovu analizu.

U simulacijskim modelima znanstvenici nastoje uzeti u obzir maksimalan broj varijabli, dok se u kvalitativnim modelima računaju samo najvažnije karakteristike. Glavni problem koji se javlja kod njih povezan je s izborom prioriternih varijabli (J. Smith, 1976.).

Ovisno o ciljevima istraživanja, mogu se primijeniti dva, u osnovi različita, pristupa modeliranju ekosustava. Prema prvom od njih, raspodjela vrsta u prostoru pretpostavlja se homogenom, barem unutar sloja ili područja koje se razmatra (npr. tzv. „aproximacija dobro izmiješanog sloja“). Matematički gledano, model ove vrste obično se sastoji od sustava običnih diferencijalnih jednadžbi (ponekad diferencijalnih jednadžbi). Prednost ovih modela koja ih čini atraktivnim za istraživanja je njihova relativna matematička jednostavnost u usporedbi s modelima s eksplicitnim prostorom. Konkretno, u ovim se modelima rezultati o stabilnosti zajednice često mogu dobiti analitički. Modeli ovog tipa mogu se primijeniti na razne probleme, npr. cvjetanje fitoplanktona (uključujući spontano cvjetanje kao što su „crvene“ ili „smeđe plime“, promjene u hranidbenoj mreži koje proizlaze iz promjene čimbenika okoliša, izumiranje vrsta, itd. Drugo pitanje koje je privuklo veliku pozornost tijekom posljednjeg desetljeća i koje se može, kao prvi pristup, proučavati u smislu prostorno homogenih modela tiče se problema je li dinamika planktonske zajednice pravilna ili kaotična.

U morskom ekosustavu rasprostranjenost vrsta obično je vrlo homogena, i u vertikalnom i u horizontalnom smjeru (iako je kontrolirana različitim čimbenicima). Da bi se proučavali razlozi i posljedice nehomogenosti vrsta, potrebno je koristiti model koji također uzima u obzir prostornu dinamiku. Modeli ovog tipa mogu biti prostorno diskretni ili prostorno kontinuirani. Prostorno diskretni modeli nazivaju se i „modeli kutija“ i organizirani su na način da se cijeli prostor koji zauzima ekosustav koji se proučava podijeli na nekoliko poddomena ili „kutija“. Pretpostavlja se da su prostorna raspodjela vrsta i okolišnih čimbenika unutar svake od njih homogena. Zatim se izvodi „zatvaranje“ modela navodeći tokove između različitih „kutija“. Uobičajen primjer ovog pristupa je višeslojni model pelagijskog ekosustava kada je cijela dubina vode podijeljena na nekoliko unutarnjih homogenih slojeva. Matematički, prostorno diskretni model još uvijek se opisuje običnim diferencijalnim jednadžbama, iako broj jednadžbi u sustavu može postati vrlo velik. Povećanje broja jednadžbi u modelu ponekad čini njegove prediktivne sposobnosti lošijim, a ne boljim.

Treba napomenuti da prostorno-diskretni modeli još ne uzimaju u obzir prostorne fenomene u potpunosti. Mogu se uspješno primijeniti na probleme gdje je prostorna nehomogenost uzrokovana heterogenošću okoline i veličinom kutija te se njihov položaj u prostoru ne mijenja s vremenom. Međutim, oni se ne mogu koristiti za modeliranje ekosustava u slučaju promjenjivog okoliša niti se mogu primijeniti za proučavanje fenomena gdje nehomogenost proizlazi iz agregacije životinja, kao što je jato riba, šarenost planktona, itd. Za probleme s "dinamičkom heterogenošću", modeli s kontinuiranim prostorom čine se

najprikladnijim alatom. Ti se modeli obično opisuju parcijalnim diferencijalnim jednadžbama. Međutim, nedostatak prostorno-kontinuiranih modela je taj što se, sa matematičke točke gledišta, čine mnogo kompliciranijim od homogenih ili prostorno-diskretnih modela. Stoga se obično može dobiti samo vrlo malo analitičkih rezultata za te modele, a glavni istraživački alat je računalna simulacija.

Važna primjedba može se napraviti u vezi s odnosom između prostorno homogenih i prostorno strukturiranih modela. U ranijim istraživanjima široko je rasprostranjeno mišljenje bilo da je izbor modela u potpunosti određen ciljevima studije. Na primjer, u slučaju da je istraživanje bilo usmjereno na potragu za uvjetima u kojima (vremenska) dinamika morske biološke zajednice može postati kaotična, primjerenim se smatrao prostorno homogeni model. Međutim, stvarnost je mnogo složenija. Zbog nelinearne interakcije između vrsta, vremenska dinamika se ne može razdvojiti od prostorne dinamike na tako naivan način. Rezultati nedavnih studija pokazuju da model koji pokazuje samo redovito ponašanje u odsustvu prostora može opisati kaotičnu dinamiku kada se prostor uzima u obzir. Promjena tipa dinamike, od pravilne do kaotične, javlja se zbog narušavanja homogenosti ili nepravilnih prostornih struktura.

## **2.2.2 Ciljevi matematičkog modeliranja u morskim ekosustavima**

Među kemijskim i biološkim procesima koji se odvijaju u morskom okolišu, pri modeliranju posebna se pozornost posvećuje mehanizmima koji određuju transformaciju i biogeokemijsku cikličnost elemenata koji ulaze u sastav žive tvari (C, N, P, S, Si). Tako se u prvim fazama modeliranja pozornost usmjeravala na stope pada koncentracije kemikalija, iskorištenje i uzastopne transformacije supstrata po zajednici organizama te brzine i mehanizme transformacije kemikalija. Kao rezultat toga, riješeni su mnogobrojni problemi koji imaju značajnu ulogu u morskim ekosustavima. Istražen je utjecaj okolišnih čimbenika kao što su temperatura, svjetlosni uvjeti, prozirnost, vodni režim i opterećenje hranjivim tvarima na morski ekosustav. Procijenjen je asimilacijski kapacitet morskog ekosustava za onečišćenje te su razvijene preporuke za stvaranje najučinkovitijih uvjeta za taj proces.

Utvrđena je uloga prirodnih i antropogenih procesa u ciklusu nutrijenata morskih ekosustava. Na temelju toga razvijene su mjere za očuvanje vodenih resursa; procijenjene su prirodne rezerve vode i potencijal njihove kakvoće, definirane su metode kontrole onečišćenja i mehanizmi pročišćavanja vode.

Procijenjena je zaliha hranjivih tvari u prirodnim vodama i njihova prostorna i vremenska varijabilnost pod utjecajem procesa njihove potrošnje od strane planktonskih organizama. Proučavane su osnove primarne proizvodnje u bazenima i njihova biološka produktivnost na višim trofičkim razinama. Definirana je uloga predatora u regulaciji fotosintetske aktivnosti fitoplanktona, istraživane su invazije novih vrsta u ekosustave te cvjetanja pojedinih skupina algi (Petrovsky i sur., 1998.).

Sada su relevantni ciljevi matematičkog modeliranja biogeokemijskih procesa u morskim ekosustavima proučavanje brzina kemijskih i bioloških procesa, kruženje tvari u prirodnim vodama, uvjeti formiranja biološke produktivnosti u morskim bazenima te kompleksna istraživanja procesa kemijske izmjene na područjima „voda – atmosfera“ i „voda – dno“ te kemijske i biološke transformacije tvari u vodenom okolišu i pridnenim sedimentima.

Pri proučavanju kompleksa hidrodinamičkih procesa koji se odvijaju u morskom okolišu, kod matematičkog modeliranja stanja morskih ekosustava velika se pozornost pridaje problemima horizontalnog i vertikalnog prijenosa onečišćujućih tvari, utvrđivanju uvjeta nastanka i razgradnje morskih organizama, koncentracije i preraspodjeli života po dubini (Menshutkin i Finenko, 1975.).

### 3. ZAKLJUČAK

Matematika, uz materinji jezik, predstavlja ključni predmet u osnovnom i srednjoškolskom obrazovanju, a njezina se primjena nastavlja kroz više i visoko obrazovanje u različitim disciplinama, uključujući prirodne znanosti. Ova povezanost između matematike i stvarnog svijeta oduvijek je bila prisutna, osobito u razumijevanju složenih prirodnih fenomena. U radu su prikazani različiti primjeri kako se matematika koristi u biologiji, s naglaskom na morskim ekosustavima.

Zaključno, može se afirmirati da bi biologija, kao znanstvena disciplina, teško dosegla današnji stupanj razvoja bez integracije matematičkih koncepata. U kontekstu morskih ekosustava, matematika omogućuje jasnu i preciznu analizu podataka putem tabličnih i shematskih prikaza, dijagrama te predikcija rasta populacija. Ove metode ne samo da unose mjerljivu vrijednost u znanstvene istraživačke procese, već također olakšavaju razumijevanje složenih ekoloških interakcija.

Povijesno, primjena matematike u biologiji datira još od 18. stoljeća, kada su prirodne znanosti počele doživljavati intenzivan razvoj. Značajni napredak u opažanju i mjerenju prirodnih fenomena doveo je do potrebe za matematičkim izražavanjem, a današnji interes za matematičku biologiju dodatno ističe važnost ove discipline. Ova grana biologije fokusira se na matematičko modeliranje bioloških procesa, čime se omogućuje dublje razumijevanje morskih ekosustava.

Stoga, matematika se pokazuje kao neizostavan alat u proučavanju morskih ekosustava, jer omogućuje analizu podataka, modeliranje populacija i ekoloških interakcija. Korištenjem matematičkih metoda, znanstvenici su sposobni predvidjeti promjene, optimizirati upravljanje resursima i donositi informirane odluke u cilju očuvanja morskog okoliša. Važnost matematike leži u njezinoj sposobnosti da pruži dublji uvid u složene morske ekosustave, čime doprinosi održivom razvoju i očuvanju našeg prirodnog naslijeđa.

## 4. LITERATURA

- A. Hastings, M. A. Palmer 2003. A bright future for biologists and mathematicians
- Aizatulin T. 1974. Modeling of externally metabolic systems and systems with mixed coupling. Biochemical trophodynamics in marine coastal ecosystems, 163 – 183.
- Berlinski D. 2011. Beskonačni uspon, kratka povijest matematike
- Dakić B., Elezović N. 2020. Matematika 1, udžbenik za 1. razred gimnazija i strukovnih škola, 2.dio
- Dombrovsky Y. i sur. 1990. Theoretical and applied aspects of primary production modeling in water basins, 175 – 176.
- Fashchuk D., Chicherina O., Leonov A. 2005. Geographic and ecological aspects of mathematical modeling of marine basins
- Gorstko A., Kamyshansky A., Litvinenko A. 1982. On use of mathematical models in ecological expertise of hydroeconomic activity projects, 13: 219 – 226.
- J.E.Cohen 1987. Food webs and niche space
- Jørgensen S.E. 1999. State – of – the – art of ecological modeling with emphasis on development of structural dynamic models. Ecological Modeling, 120: 75-96.
- Kneebone G. T. 1963. Mathematical logic and the Foundations of mathematics
- Magurran A. 1988. Ecological Diversity and Its Measurement
- Malchow H. i sur. 2000. Spatio-temporal pattern formation in coupled models of plankton dynamics and fish school motion. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 1: 53 – 67.
- Marrase C. i sur. 1997. Lectures on Plankton and Turbulence Scientia Marina, 61: 1 – 238.
- May R.M., Leonard W. 1975. Nonlinear aspects of competition between three species. SIAM Journal of Applied Mathematics, 29: 243 – 252.
- Niul J. 1978. Analysis of marine systems, In: Modeling of marine systems, 6 – 43.
- Okubo A. 1980. Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models, 290 – 291.
- Parsons T.P., Takahashi M., Hargrave B. 1982. Biological oceanology
- Petrovskii S.V. and Malchow H. 2001. Wave of chaos: New Mechanism of Pattern Formation in Spatio - Temporal Population Dynamics, Theoretical Population Biology, 59(2): 157 – 174.

- Platt T., Mann K.H., Ulanowicz R.E. 1981. *Mathematical Models in Biological Oceanography*
- Powell T.M. i sur. 1975. Spatial scales of current speed and phytoplankton biomass fluctuations, 189: 1088 – 1090.
- Powell T.M. and Okubo A. 1994. Turbulence, Diffusion and Patchiness in the Sea. *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, 343: 11 – 18.
- R. T. Paine (1996) Food web complexity and species diversity, *American Naturalist*, 910: 65 – 75.
- Shigesada N. and Okubo A. 1981. Analysis of the self-shading effect on algal vertical distribution in natural waters. *Journal of Mathematical Biology*, 12: 311 – 326.
- Šolić M. (2014) *Ekologija populacija*
- Truscott J.E., Brindley J. 1994 Ocean plankton population as excitable media, *Bulletin of Mathematical Biology*, 56: 981 – 998.
- Ulanowicz R.E. 1972 Mass and energy flow in closed ecosystems, *Journal of Theoretical Biology*, 34: 239 – 253.
- Ulanowicz R.E. 1997 *Ecology, the Ascendant Perspective*
- Valiela I. 1995 *Marine Ecological Processes*
- Vinberg G.G., Anisimov S.A. 1969 An experience of investigation of mathematical ecosystem model, 67: 49 – 51.
- Vinogradov M.E., Menshutkin V.V. 1977 The modeling of open-sea ecosystems, in: *The Sea: Ideas and Observations on Progress in the Study of the Seas*, 6; 891 – 921.
- Wulff F., Field J.G., Mann K.H. 1989 Network Analysis in Marine Ecology, *Coastal and Estuarine Studies*, 32: 284 – 286.